היחידה למתמטיקה

19.09.2016
09.00-12.00

חדו"א 2 להנדסת תוכנה

מועד א'

תשע"ו סמסטר קיץ

מרצה אחראי: ד"ר אקרמן יבגניה
מרצים:
באר שבע: ד"ר א. לרמן
אשדוד : ד"ר סרוסי שי
משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון עם צג קטן ,דפי נוסחאות של הקורס (2 עמודים בפורמט A4),מצורפים לשאלון. לסטודנטים בעלי אישור לדף נוסחאות מורחב ניתן להשתמש בדף נוסחאות מורחב הנכתב על ידי המרצים (2 עמודים בפורמט A4).
תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.

בהצלחה!

השאלון + דף נוסחאות מכיל 5 דפים (כולל דף זה).

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה 1 (20 נק')

נתונה הפונקציה : $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-4x+xy^2$.

א) (10 נק') מצא את נקודות המקסימום והמינימום המקומי של הפונקציה.
ב) (10 נק') מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה בעיגול הסגור:
$\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

שאלה 2 (22 נק')

א) (4 נק') הגדר את המושגים הבאים:
1) טור מתכנס בהחלט.
2) טור מתכנס בתנאי.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון (ע"ר)
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג
טל' 08-6475653 | פקס 08-6475654 | margalith@sce.ac.il

ב) (8 נק') הוכח את המשפט הבא: אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודה $b \neq 0$, אז לכל x ממשי המקיים $|x| < |b|$ הטור מתכנס בהחלט.

ג) (10 נק') מצא את תחום ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

פתור 3 מבין השאלות 3-6

שאלה מס' 3 (16 נק')

א) (12 נק') שרטט את תחום האינטגרציה, שנה את סדר האינטגרציה באינטגרל $\int_{-3}^{3} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} e^{(x^2+y^2)} dy$ וחשב אותו.

ב) (4 נק') פתור את המשוואה הדיפרנציאלית : $y' \cot x + y - 2 = 0$.

שאלה מס' 4 (16 נק')

א) (12 נק') שרטט את הגוף החסום על ידי המשטחים: $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ומצא את נפחו.

ב) (4 נק') חשב את הגבול $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{xy + (x+y)^2}$ או הוכח שהוא אינו קיים.

שאלה מס' 5 (16 נק')

א) (12 נק') מצא נקודה על המישור $x + y - z = 2$ הקרובה ביותר למשטח $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 3 = 0$.

ב) (4 נק') חקור את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

שאלה מס' 6 (16 נק')

א) נתונה הפונקציה: $z=\ln\frac{x+\sqrt{y}-1}{2y\sqrt{x}}$.

א1) (4 נק') מצא את הנגזרת הכיוונית $\frac{\partial z}{\partial \overline{MO}}$ בנקודה $M(4,1)$ כאשר $O(0,0)$.

א2) (4 נק') מצא נקודה $M\neq P\in R^2$ כך ש- $\left.\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{MP}}\right|_M=0$.

א3) (4 נק') מצא את הכיוון בו הנגזרת הכיוונית בנקודה $M(4,1)$ מקבלת את ערכה המקסימלי וחשב את הנגזרת המקסימלית.

ב) (4 נק') לאילו הערכים של הפרמטר m שלושת הוקטורים

$\vec{b}=-m\hat{i}+(m+2)\hat{j}+(m+3)\hat{k}$, $\vec{a}=(m+4)\hat{i}+(2m+8)\hat{j}+\hat{k}$

ו- $\vec{c}=4\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ הם קומפלנריים (מקבילים לאותו מישור) ?

פתור אחת מהשאלות 7 ו-8

שאלה מס' 7 (10 נק')

מצא את משוואת המישור העובר דרך הישר $\begin{cases}x+2y-z+2=0\\2x-y+3z-5=0\end{cases}$ (הישר כולו מונח במישור המבוקש) במקביל לוקטור $\vec{a}(2,-1,-2)$.

שאלה מס' 8 (10 נק')

הוכח שהישרים הבאים מצטלבים : $\begin{cases}x=2-3s\\y=1+2s\\z=5+s\end{cases}$ ו- $\begin{cases}x=1+2t\\y=3-5t\\z=-1+t\end{cases}$.

בהצלחה!

1. נפח של פירמידה משולשת ABCD : $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{DA}\times\overline{DB}\right)\cdot\overline{DC}\right|$

2. מרחק מהנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax+By+Cz+D=0$: $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3. מרחק מהנקודה M לישר העובר דרך הנקודה N במקביל לוקטור $\bar{a}$: $d=\frac{\left|\overline{MN}\times\bar{a}\right|}{|\bar{a}|}$

4. מרחק בין שני ישרים מצטלבים שעוברים דרך נקודות M ו- N במקביל לוקטורים a ו- b):

$$d=\frac{\left|\overline{MN}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$$

5. משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ במאונך לווקטור נורמל $n(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

6. הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) במקביל לווקטור $a(l, m, n)$:

$$\{x=x_0+l\cdot t,\quad y=y_0+m\cdot t,\quad z=z_0+n\cdot t\}\quad -\infty<t<\infty$$

7. משוואת מישור המשיק למשטח $F(x,y,z)=0$ בנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

8. נגזרת מכוונת של $z(x,y)$ בנקודה M_0 ובכיוון של וקטור $\bar{a}$: $\frac{dz(M_0)}{d\bar{a}}=\frac{grad\ z(M_0)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}$

9. קריטריון $\boxed{\Delta(M)=f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M)-\left(f''_{xy}(M)\right)^2}$ לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של f(x)

10. פונקצית לגרנז' למציאת אקסטרמום של f(x,y) בתנאי $\varphi(x,y)=0$: $\boxed{L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)}$

11. מעבר לקואורדינטות קוטביות: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

12. חישוב המסה m ומרכז המסה (x_c, y_c) של "גוף מישורי" D בעל צפיפות $\rho(x,y)$:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy;\quad x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy;\quad y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$$

13. חישוב של אינטגרל קווי מסוג ראשון:

א) המסלול L מוגדר באופן $y=y(x)$: $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}dx$

ב) מסלול L מוגדר באופן פרמטרי: $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$

14. נוסחת גרין: $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

15. מבחני קושי ודלמבר לבדיקת התכנסות של **טורים חיוביים:**

אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q}$ (דלמבר) או אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q}$ (קושי)

אזי אם $q<1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס ואם $q>1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

16. **רדיוס ההתכנסות** R של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ או $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

17.טור טיילור עבור הפונקציה $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

18. טורי מקלורן עבור מספר פונקציות בסיסיות:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...\ [-1<x<1];\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...;\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

19. נגזרות:

1. $(c)'=0,\ c=const;$ 2. $(x^n)'=nx^{n-1};$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a;$ 4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$
5. $(\sin x)'=\cos x;$ 6. $(\cos x)'=-\sin x;$
7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};$ 8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$
9. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};$ 10. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
11. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ 12. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2};$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2};$$
$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

<u>פונקציה פרמטרית:</u>

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

20. אינטגרלים

1. $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C\qquad(n\neq-1)$
2. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C;$ 3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int\sin(ax)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$
5. $\int\cos(ax)dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+C$
6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$ 7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$
8. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$;
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right|+C$

<u>אינטגרציה לפי חלקים:</u>

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

<u>הצבה טריגונומטרית אוניברסלית:</u>

$$tg\frac{x}{2}=t,\ x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

11. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$
12. $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C;$ 13. $\int\frac{xdx}{x^2+a}=\frac{\ln|x^2+a|}{2}+C$
14. $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=2\cdot\sqrt{f(x)}+C;$ 15. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$
16. $\int tgx\,dx=-\ln|\cos x|+C;$ 17. $\int ctgx\,dx=\ln|\sin x|+C$

21. נוסחאות טריגונומטריות:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x;$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x);\quad 2\sin^2(x)=1-\cos(2x);\quad 2\cos^2(x)=1+\cos(2x);$

$(u=0.5(x+y),\ v=0.5(x-y))\rightarrow \sin(x)+\sin(y)=2\sin(u)\cos(v);\ \sin(x)-\sin(y)=2\sin(v)\cos(u);$

$\cos(x)+\cos(y)=2\cos(u)\cos(v);\quad \cos(x)-\cos(y)=-2\sin(u)\sin(v)$

$2\sin x\sin y=\cos(2v)-\cos(2u);\ 2\cos x\cos y=\cos(2u)+\cos(2v);\ 2\sin x\cos y=\sin(2u)+\sin(2v)$

בהצלחה!